УДК 519.7
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей

Е. Е. Трифонова

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия

etrifonova@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Объектом исследования является выразимость рациональных вероятностей путем преобразования булевыми функциями случайных величин с распределениями из некоторого начального множества. Одним из важных вопросов при исследовании выразимости является конечная порожденность множеств распределений, т.е. возможности с использованием некоторого конечного набора начальных распределений выразить все распределения из требуемого класса. В рамках данной работы исследуется конечная порожденность вероятностей, выражаемых пятеричными дробями, при преобразованиях случайных величин функцией голосования. *Материалы и методы.* Для изучения выразительных возможностей преобразователей вероятностей используются методы, совмещающие теорию булевых функций и математический анализ, а также элементарная теория чисел. *Результаты.* В данной работе показано, что преобразования случайных величин с распределениями из конечного множества с помощью функции голосования не позволяют выразить все вероятности, записываемые пятеричными дробями. *Выводы.* В работе доказана бесконечная порожденность класса рациональных вероятностей при преобразованиях функцией голосования, являющейся достаточно мощным преобразователем вероятностей. Хотя использованные методы не переносятся непосредственно на другие важные преобразующие системы (например, «конъюнкция, дизъюнкция»), они предоставляют нетривиальный пример доказанной бесконечной порожденности класса вероятностей.

Ключевые слова: бернуллиевская случайная величина, функция голосования, конечная порожденность, преобразование случайных величин

Для цитирования: Трифонова Е. Е. О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 39–48. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers

E.E. Trifonova

Keldysh Institute of Applied Mathematics
(Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

etrifonova@yandex.ru

Abstract. *Background.* The object of the research is the expressibility of rational probabilities by transforming random variables with distributions from some initial set by Boolean functions. One of the important questions in the study of expressibility is the finite generation of the sets of distributions, i.e. the possibility of expressing all distributions from the required class using some finite set of initial distributions. Within the framework of this work, we investigate the finite generation of probabilities expressed by fivefold fractions when transforming random variables by the voting function. *Materials and methods.* To study the expressive capabilities of probability converters, methods are used that combine the theory of Boolean functions and mathematical analysis, as well as elementary number theory. *Results.* In this article, it is shown that transformations of random variables with distributions from a finite set using the voting function do not allow one to express all the probabilities written in fivefold fractions. *Conclusions.* The work proves the infinite generation of the class of rational probabilities under transformations by the voting function, which is a rather powerful probability transformer. Although the methods used do not carry over directly to other important transformative systems (for example, "conjunction, disjunction"), they provide a non-trivial example of the proven infinite generation of the probability class.

Keywords: Bernoulli random variable, majority function, finite generativeness, random variable transformation

For citation: Trifonova E.E. On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1:39–48. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

Введение

В настоящее время понятие «преобразователя вероятности» – детерминированного устройства, получающего на входе значения случайных величин и осуществляющего вычисления с ними, тем самым генерирующего новые случайные величины с иными распределениями, регулярно возникает в работах различных авторов. Одним из вариантов таких преобразователей являются «алгебраические» – порождающие новую случайную величину путем применения алгебраических операций к конечному набору случайных величин. Свойства таких преобразователей рассматриваются, например, в [1–7]. Данная работа также посвящена исследованию таких преобразователей для бернуллиевских случайных величин. В качестве преобразующих операций рассматриваются булевы функции.

Преобразования бернуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями весьма подробно изучены в работах Р. Л. Схиртладзе, Ф. И. Салимова и Р. М. Колпакова. Одним из важных вопросов для множеств бернуллиевских распределений является вопрос о конечной порожденности, т.е. возможности получения всевозможных бернуллиевских распределений с компонентами из заданного множества рациональных чисел путем применения алгебраических преобразований из заданного класса к случайным величинам с распределениями из некоторого конечного множества начальных распределений.

Распределение бернуллиевской случайной величины полностью определяется ее вероятностью обращения в единицу, поэтому далее, говоря о бернуллиевских распределениях, будем отождествлять их с числами из отрезка [0;1]. В работах Р. Л. Схиртладзе [7, 8] установлено, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют из единственного начального распределения $\frac{1}{2}$ породить все множество двоично-рациональных распределений. То же верно для троично-рациональных распределений и множества начальных распределений $\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}$. При этом для простого числа $r > 3$ доказано, что множество начальных распределений $\left\{\frac{1}{r},\frac{2}{r},...,\frac{r-1}{r}\right\}$ не порождает всего множества r-ично рациональных распределений. В работе [7] высказана гипотеза, что для простых $r > 3$ не существует конечного множества бернуллиевских распределений, порождающего все множество r-ично-рациональных распределений. Эта гипотеза до настоящего момента не подтверждена и не опровергнута.

Дальнейшие результаты в этой области были получены Ф. И. Салимовым [9–11]. Он показал, в частности, что множества r-ично-рациональных распределений являются конечно порожденными при использовании в качестве системы преобразующих операций набора функций $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$. При этом в качестве множества начальных распределений можно взять $\left\{\frac{1}{r},\frac{2}{r},...,\frac{r-1}{r}\right\}$.

В работах Р. М. Колпакова показано [12, 13], что для множеств рациональных бернуллиевских распределений $\Gamma[r_1,...,r_s]$, у которых в разложении знаменателя на простые множители могут встречаться числа r_1, …, r_s, относительно преобразований системой $\{\&,\vee\}$ при $s \geq 2$ всегда существуют конечные множества начальных распределений, порождающие всю совокупность $\Gamma[r_1,\dots,r_s]$. Более того, если среди r_1, …, r_s встречается 2 или 3, в качестве множества начальных распределений можно взять все правильные дроби со знаменателем $r_1 \cdot \ldots \cdot r_s$. Также в работе [6] предложены усиления системы $\{\&,\vee\}$ в классе функций, реализуемых контактными схемами, относительно которых множества распределений $\Gamma[5]$ и $\Gamma[7]$ оказываются конечно порожденными. Наконец, в работе [14] предложена система монотонных функций, относительно которой множество $\Gamma[r]$ при любом простом r порождается множеством всех правильных дробей со знаменателем r.

Таким образом, к настоящему моменту вопрос о конечной порожденности множеств $\Gamma[r]$ относительно системы $\{\&,\vee\}$ при $r > 3$ остается открытым, но получен ряд результатов о конечной порожденности этого множества в более сильных системах. При этом содержательных «отрицательных» результатов, свидетельствующих о бесконечной порожденности множеств $\Gamma[r]$ относительно каких-либо систем, практически нет. В настоящей работе мы изучаем вопрос конечной порожденности множества $\Gamma[5]$ относительно преобразования функцией голосования (медианой). Хотя полученные результаты не позволяют непосредственно сделать какие-то выводы о конечной порожденности относительно системы $\{\&,\vee\}$, они представляют собой пример доказанной бесконечной порожденности относительно достаточно мощной преобразующей системы: как следует из результатов [15], система из медианы, так же как и система $\{\&,\vee\}$, позволяет из конечного множества начальных распределений породить множество, всюду плотное на отрезке [0;1].

1. Определения

Пусть x – случайная величина, принимающая значения 0 и 1. Если x принимает значение 1 с вероятностью p, то вероятность значения 0 равна $(1-p)$, т.е. распределение случайной величины x однозначно определяется вероятностью ее обращения в 1. Далее будем считать, что каждой случайной величине, принимающей значения 0 и 1, сопоставлено число $p \in [0;1]$.

Будем рассматривать преобразования, осуществляемые в результате подстановки независимых в совокупности случайных величин со значениями 0 и 1 вместо переменных булевых функций. Если $f\left(x_1,...,x_n\right)$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – некоторая булева функция, то вероятностная функция $\hat{f}\left(x_1,...,x_n\right)$: $[0;1]^n \to [0;1]$, индуцированная булевой функцией $f\left(x_1,...,x_n\right)$, определяется соотношением

$$\hat{f}(p_1,p_2,...,p_n) = \sum_{\substack{(x_1,x_2,...,x_n):\\ f(x_1,x_2,...,x_n)=1}} \prod_{i=1}^{n}\left(x_i p_i + \overline{x}_i(1-p_i)\right).$$

Содержательно $\hat{f}\left(x_1,...,x_n\right)$ выражает вероятность того, что случайная величина $f\left(x_1,...,x_n\right)$ принимает значение 1, если вероятности обращения в единицу величин $x_1,\ldots, x_n$ равны $p_1,\ldots, p_n$ соответственно.

Напомним, что булева функция $m(x,y,z)$, определяемая как $m(x,y,z) = x\&y \vee y\&z \vee x\&z$, называется *медианой* или *функцией голосования*. Индуцированная медианой функция вероятностей $\hat{m}(x,y,z)$ выражается следующим образом:

$$\hat{m}(x,y,z) = xyz + xy(1-z) + (1-x)yz + x(1-y)z = xy + yz + xz - 2xyz.$$

Введем обозначение для множества чисел, выразимых правильными r-ичными дробями, где r – простое число: $\Gamma[r] = \left\{ \frac{m}{r^{\alpha}} \middle| m \le r^{\alpha}, \alpha \in \mathrm{N} \right\}$. Тогда, в частности, $\Gamma[5]$ – множество чисел, выразимых с помощью пятеричных правильных дробей.

Также для удобства введем обозначения для некоторых подмножеств пятеричных дробей, положив $A(5^i) = \left\{ \frac{1}{5^i}, \frac{2}{5^i}, ..., \frac{5^i-1}{5^i} \right\}$ и $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A(5^i)$.

Объектом исследования настоящей работы является выразимость рациональных вероятностей путем преобразования булевыми функциями (медианой) случайных величин с распределениями из некоторого начального множества $G \subseteq [0;1]$. Формально определим множество *выразимых вероятностей* $V(G)$ следующим образом: во-первых, любой элемент $g \in G$ включается в $V(G)$; во-вторых, если g_1, g_2, g_3 уже включены в $V(G)$, то $\hat{m}(g_1, g_2, g_3)$ также включается в $V(G)$; иных элементов множество $V(G)$ не содержит. В обозначениях работы [1] определенное нами множество $V(G)$ записывается как $V_{\{m\}}(G)$.

В рамках данной работы будем исследовать, выполняется ли равенство $V(A_k) = \Gamma[5]$ для какого-либо k, т.е. можно ли выразить произвольную пятеричную дробь, используя медиану и множество A_k в качестве начального.

2. Основные утверждения

Лемма 1. Функция $\hat{m}(x, y, z)$ является возрастающей по каждому из аргументов на множестве $\left[\frac{1}{5^{k_1}};\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}}\right]\times\left[\frac{1}{5^{k_2}};\frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}}\right]\times\left[\frac{1}{5^{k_3}};\frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}}\right]$ и принимает минимальное и максимальное значения в точках $\left(\frac{1}{5^{k_1}},\frac{1}{5^{k_2}},\frac{1}{5^{k_3}}\right)$ и $\left(\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}},\frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}},\frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}}\right)$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим $\hat{m}(x, y, z)$ как функцию трех переменных. Тогда частные производные по каждой из трех переменных могут быть записаны как

$$\begin{cases} \hat{m}'_x = y + z - 2yz, \\ \hat{m}'_y = x + z - 2xz, \\ \hat{m}'_z = x + y - 2xy. \end{cases}$$

В особых точках частные производные функции по каждой из трех переменных должны обращаться в ноль, т.е.:

$$\begin{cases} y + z - 2yz = 0, \\ x + z - 2xz = 0, \\ x + y - 2xy = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что особыми являются только точки (0,0,0) и (1,1,1), которые не принадлежат области $\left[\frac{1}{5^{k_1}};\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}}\right]\times\left[\frac{1}{5^{k_2}};\frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}}\right]\times\left[\frac{1}{5^{k_3}};\frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}}\right]$.

Заметим, что на области определения все частные производные больше 0, функция возрастает по каждой из переменных.

Следовательно, в рассматриваемой области в силу возрастания функции и отсутствия особых точек внутри нее минимальное значение функция принимает в точке $\left(\frac{1}{5^{k_1}},\frac{1}{5^{k_2}},\frac{1}{5^{k_3}}\right)$, а максимальное – в точке $\left(\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}},\frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}},\frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}}\right)$. □

Следствие 1. Пусть $x = \frac{a}{5^{k_1}}$, $y = \frac{b}{5^{k_2}}$, $z = \frac{c}{5^{k_3}}$ – правильные дроби. Тогда справедлива следующая оценка для значения $\hat{m}(x, y, z)$:

$$\frac{5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3}-2}{5^{k_1+k_2+k_3}} \le \hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}},\frac{b}{5^{k_2}},\frac{c}{5^{k_3}}\right) \le \frac{5^{k_1}\cdot 5^{k_2}\cdot 5^{k_3}-5^{k_1}-5^{k_2}-5^{k_3}+2}{5^{k_1+k_2+k_3}}. \quad (1)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 наименьшее значение на дробях со знаменателями 5^{k_1}, 5^{k_2}, 5^{k_3} функция $\hat{m}$ принимает в точке $\left(\frac{1}{5^{k_1}},\frac{1}{5^{k_2}},\frac{1}{5^{k_3}}\right)$, тогда

$$\hat{m}(x,y,z) \ge \frac{1}{5^{k_1+k_2}}+\frac{1}{5^{k_1+k_3}}+\frac{1}{5^{k_2+k_3}}-2\cdot\frac{1}{5^{k_1+k_2+k_3}}=\frac{5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3}-2}{5^{k_1+k_2+k_3}}.$$

Аналогично используем лемму 1 для оценки наибольшего значения:

$$\hat{m}(x,y,z) \le \frac{(5^{k_1}-1)(5^{k_2}-1)}{5^{k_1+k_2}}+\frac{(5^{k_1}-1)(5^{k_3}-1)}{5^{k_1+k_3}}+\frac{(5^{k_2}-1)(5^{k_3}-1)}{5^{k_2+k_3}}-$$

$$-2\cdot\frac{(5^{k_1}-1)(5^{k_2}-1)(5^{k_3}-1)}{5^{k_1+k_2+k_3}}=\frac{5^{k_1+k_2+k_3}-5^{k_1}-5^{k_2}-5^{k_3}+2}{5^{k_1+k_2+k_3}}. \square$$

Утверждение 1. Если $x=\frac{a}{5^{k_1}}$, $y=\frac{b}{5^{k_2}}$, $z=\frac{c}{5^{k_3}}$ – несократимые правильные дроби, $k_1, k_2, k_3 \in N$, то значение $\hat{m}(x,y,z)$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{5^h}$, где $B \in N$, $h < k_1 + k_2 + k_3$.

Доказательство. Предположим, что $\hat{m}(x,y,z)=\frac{B}{5^h}$, где $h < k_1 + k_2 + k_3$, тогда $5^{k_1+k_2+k_3}\cdot\hat{m}(x,y,z) \bmod 5 = 0$. Подставляя значения x, y, z в функцию $\hat{m}$, получим равенства:

$$\hat{m}(x,y,z)\cdot 5^{k_1+k_2+k_3} \bmod 5 = \frac{5^{k_3}ab+5^{k_1}bc+5^{k_2}ac-2abc}{5^{k_1+k_2+k_3}}\cdot 5^{k_1+k_2+k_3} \bmod 5 =$$

$$= ab\cdot 5^{k_3}+bc\cdot 5^{k_1}+ac\cdot 5^{k_2}-2abc \bmod 5 = -2abc \bmod 5.$$

Тогда, если наше предположение верно, то $2abc \bmod 5 = 0$. Это может быть выполнено, только если a, b или c равны нулю mod 5. Однако это невозможно, поскольку по условию дроби $\frac{a}{5^{k_1}}$, $\frac{b}{5^{k_2}}$, $\frac{c}{5^{k_3}}$ являются несократимыми и правильными.

Отсюда получаем, что значение $\hat{m}(x,y,z)$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{5^h}$, где $h < k_1 + k_2 + k_3$. □

Утверждение 2. Для любых чисел $k_1, k_2, k_3 \in N$, удовлетворяющих $k_1 + k_2 + k_3 = l$, выполняется: $5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3} \ge 3\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]}$.

Доказательство. Функция $\varphi(x,y,z)=5^x+5^y+5^z$ возрастает по каждой из переменных. Так как $k_1+k_2+k_3=l$, то возможны два варианта:

1. Одно из значений k_1,k_2,k_3 больше $\left[\frac{l}{3}\right]$.
2. Выполнено условие $k_1,k_2,k_3\le\left[\frac{l}{3}\right]$.

Рассмотрим первый случай. Без нарушения общности можно считать, что $k_1>\left[\frac{l}{3}\right]$. Тогда получаем:

$$5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3}\ge 5\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]}+5^{k_2}+5^{k_3}>5\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]}>3\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]},$$

что доказывает утверждение в первом случае.

Рассмотрим второй случай, когда $k_1,k_2,k_3\le\left[\frac{l}{3}\right]$. Это возможно только в том случае, когда l делится на 3 и $k_1=k_2=k_3=\frac{l}{3}$. Тогда получаем:

$$5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3}=3\cdot 5^{\frac{l}{3}}=3\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]},$$

что доказывает утверждение во втором случае.□

Отметим, что утверждение 2 частично следует из S-выпуклости функции $\varphi(x,y,z)$ (см. [16]), однако во всей полноте его проще доказать непосредственно, чем выводить из более общих свойств.

Утверждение 3. Для любого $l\in N$, $l>3$, найдется такое D, что $\frac{D}{5^l}$ не представимо в виде $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}},\frac{b}{5^{k_2}},\frac{c}{5^{k_3}}\right)$, где $\frac{a}{5^{k_1}},\frac{b}{5^{k_2}},\frac{c}{5^{k_3}}$ – несократимые правильные дроби, $a, b, c, k_1, k_2, k_3 \in N$.

Доказательство. Положим $D=3\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]}-3$. Очевидно, что $\frac{D}{5^l}$ является правильной несократимой дробью.

Предположим, что дробь $\frac{D}{5^l}$ может быть выражена путем применения $\hat{m}(x,y,z)$ к трем пятеричным дробям со знаменателями 5^{k_1}, 5^{k_2}, 5^{k_3}, и рассмотрим различные случаи соотношения между $k_1+k_2+k_3$ и l.

Если $l=k_1+k_2+k_3$, то по утверждению 2 и следствию 1 получаем:

$$\frac{D}{5^l}<\frac{3\cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]}-2}{5^l}\le\frac{5^{k_1}+5^{k_2}+5^{k_3}-2}{5^l}\le\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}},\frac{b}{5^{k_2}},\frac{c}{5^{k_3}}\right).$$

Таким образом, случай $k_1+k_2+k_3=l$ невозможен.

Из утверждения 1 вытекает невозможность случая $l<k_1+k_2+k_3$.

Наконец, если предположить, что $l > k_1 + k_2 + k_3$, и при этом выполнено равенство $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right) = \frac{B}{5^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{D}{5^l}$, то $D = B \cdot 5^{l-(k_1+k_2+k_3)}$, откуда $D \bmod 5 = 0$, что противоречит тому, что $\frac{D}{5^l}$ – несократимая дробь.

Следовательно, ни для каких a, b, c, k_1, k_2, k_3 нельзя представить дробь $\frac{3 \cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]} - 3}{5^l}$ в виде $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right)$. Утверждение доказано. □

Теорема 1. Для любого $k \in N$ имеет место $V(A_k) \neq \Gamma[5]$.

Доказательство. Пусть задано какое-то k. Возьмем $l = k + 1$. Тогда дробь $\frac{3 \cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]} - 3}{5^l}$, очевидно, будет являться правильной и несократимой. Представим все дроби, содержащиеся в A_k, в несократимом виде. Тогда для $\frac{3 \cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]} - 3}{5^l}$ выполняется следующее:

1. Она не лежит в A_k, поскольку $l > k$.

2. Если бы она принадлежала $V(A_k)$, то в силу утверждения 1 она должна выражаться путем подстановки в $\hat{m}(x, y, z)$ элементов из A_k. Однако последнее невозможно в силу следствия 1 (см. доказательство утв. 3).

Следовательно, по определению $\frac{3 \cdot 5^{\left[\frac{l}{3}\right]} - 3}{5^l} \notin V(A_k)$. Отсюда получаем, что $V\left(A_k\right) \neq \Gamma[5]$, какое бы k мы не взяли. Теорема доказана.□

Следствие 2. Какую бы конечную систему $G \subset \Gamma[5]$ мы ни взяли, выполняется неравенство $V(G) \neq \Gamma[5]$.

Заключение

Таким образом, в данной работе было показано, что с помощью функции, индуцированной медианой, и конечного множества пятеричных дробей невозможно выразить произвольную пятеричную дробь.

Список литературы

1. Яшунский А. Д. Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 320–335.
2. Qian W., Riedel M. D., Zhou H., Bruck J. Transforming probabilities with combinational logic // IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst. 2011. Vol. 30, № 9. P. 1279–1292.
3. Колпаков Р. М. О многозначных преобразованиях конечных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 1. С. 102–128.
4. Яшунский А. Д. О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами // Дискретная математика. 2013. Т. 25, № 2. С.149–159.

5. Яшунский А. Д. О преобразованиях случайных величин над линейно упорядоченным трехэлементным множеством // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию С. С. Рышкова (Тула, 25–30 мая 2015 г.). Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 206–208.
6. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 1992. № 5. С. 46–52.
7. Схиртладзе Р. Л. Моделирование случайных величин функциями алгебры логики : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1966. 14 с.
8. Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщения Академии Наук ГрузССР. 1961. Т. 26, № 2. С. 181–186.
9. Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 15. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 68–89.
10. Салимов Ф. И. Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Известия вузов. Сер.: Математика. 1981. № 5. С. 78–82.
11. Салимов Ф. И. Об одном семействе алгебраических распределений // Известия вузов. Сер.: Математика. 1988. № 7. С. 64–72.
12. Колпаков Р. М. Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 1992. № 6. С. 62–65.
13. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Дискретная математика. 1994. Т. 6, № 3. С. 18–38.
14. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел монотонными функциями // Теоретические и прикладные аспекты математических исследований : сб. науч. тр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 13–17.
15. Яшунский А. Д. О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Синтез и сложность управляющих систем : материалы XVI Междунар. школы-семинара (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). М. : Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2006. С. 150–155.
16. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения : пер. с англ. М. : Мир, 1983. 576 с.

References

1. Yashunskiy A.D. Algebras of probability distributions on finite sets. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute*. 2018;301:320–335. (In Russ.)
2. Qian W., Riedel M.D., Zhou H., Bruck J. Transforming probabilities with combinational logic. *IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst*. 2011;30(9):1279–1292.
3. Kolpakov R.M. Multivalued transformations of finite sets of binary distributions with rational probabilities. *Diskretnaya matematika = Discrete math*. 2005;17(1):102–128. (In Russ.)
4. Yashunskiy A.D. On transformations of probability distributions by repetition-free quasigroup formulas. *Diskretnaya matematika = Discrete math*. 2013;25(2):149–159. (In Russ.)
5. Yashunskiy A.D. On transformations of random variables over a linearly ordered three-element set. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya: materialy XIII Mezhdunar. konf., posvyashch. 85-letiyu S. S. Ryshkova (Tula, 25–30 maya 2015 g.) = Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications: proceedings of the 13th International conference dedicated to the 85th anniversary of S. S. Ryshkov (Tula, May 25-30, 2015)*. Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta im. L. N. Tolstogo, 2015:206–208. (In Russ.)

6. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by probabilistic contact networks. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics*. 1992;5:46–52. (In Russ.)
7. Skhirtladze R.L. *Modelirovanie sluchaynykh velichin funktsiyami algebry logiki: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk = Simulation of random variables by functions of Boolean algebra: author's abstract of dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences*. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1966:14. (In Russ.)
8. Skhirtladze R.L. On the synthesis of an n-circuit from contacts with random discrete states. *Soobshcheniya Akademii Nauk GruzSSR = Reports of the Academy of Science of Georgian SSR*. 1961;26(2):181–186. (In Russ.)
9. Salimov F.I. *K voprosu modelirovaniya bulevykh sluchaynykh velichin funktsiyami algebry logiki. Veroyatnostnye metody i kibernetika. Vyp. 15 = On the question of modeling Boolean random variables by functions of the algebra of logic. Probabilistic methods and cybernetics*. Edition 15. Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 1979;68–89. (In Russ.)
10. Salimov F.I. On a system of generators for algebras over random variables. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics*. 1981;5:78–82. (In Russ.)
11. Salimov F.I. On a family of algebraic distributions. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics*. 1988;7:64–72. (In Russ.)
12. Kolpakov R.M. Estimates for the complexity of generating rational numbers by probabilistic contact π-networks *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics*. 1992;6:62–65. (In Russ.)
13. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by probabilistic contact π-networks. *Diskretnaya matematika = Discrete math*. 1994;6(3):18–38. (In Russ.)
14. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by monotone functions. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty matematicheskikh issledovaniy: sb. nauch. tr. = Theoretical and applied aspects of mathematical research: collected articles.* Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1994:13–17. (In Russ.)
15. Yashunskiy A.D. On probability transformations by repetition-free Boolean formulas. *Sintez i slozhnost' upravlyayushchikh sistem: materialy XVI Mezhdunar. shkoly-seminara (Sankt-Peterburg, 26–30 iyunya 2006 g.) = Synthesis and complexity of control systems: proceedings of 16th International school-seminar (Saint-Petersburg, June 26–30, 2006).* Moscow: Izd-vo mekhaniko-matematicheskogo f-ta MGU, 2006:150–155. (In Russ.)
16. Marshall A., Olkin I. *Neravenstva: teoriya mazhorizatsii i ee prilozheniya: per. s angl. = Inequalities: majorization theory and its applications: translated from English.* Moscow: Mir, 1983:576. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Екатерина Евгеньевна Трифонова
инженер-исследователь отдела № 4 «Математический отдел», сектор № 3 «Теоретическая кибернетика», Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (Россия, г. Москва, Миусская площадь, 4)

Ekaterina E. Trifonova
Research engineer of department No. 4 "Mathematical Department", sector № 3 "Theoretical Cybernetics", Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (4 Miusskaya square, Moscow, Russia)

E-mail: etrifonova@yandex.ru

Поступила в редакцию / Received 10.09.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 21.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020